

## EXERCICES RÉDIGÉS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

---

### **Exercice 1** Valeur exacte du cosinus et du sinus de $\pi/12$

On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

1. Écrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme algébrique.
2. Déterminer les écritures sous formes algébrique, exponentielle et trigonométrique de  $z_1 z_2$ .
3. En déduire la valeur exacte du cosinus et sinus suivants :

$$\cos \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12}$$

### **Exercice 2** Des pistes pour démontrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur

Démontrer les équivalences suivantes :

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow Z = \bar{Z}$$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = 0 \text{ [}\pi\text{)})$$

$$Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow Z + \bar{Z} = 0$$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \text{ [}\pi\text{)})$$

Applications :

1. Comment choisir le nombre complexe  $z$  pour que  $Z = z^2 + 2z - 3$  soit réel ?  
Soit  $E$  l'ensemble des points  $M$  du plan complexe d'affixe  $z$  tels que  $Z$  soit réel. Déterminer  $E$ .
2. On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $i$  et  $1$ . Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$  distinct de  $A$ .  
On pose 
$$Z = \frac{1-z}{i-z}$$
  
Déterminer l'ensemble  $E$  des points  $M$  tels que  $Z$  soit réel.  
Déterminer l'ensemble  $F$  des points  $M$  tels que  $Z$  soit imaginaire pur.

### **Exercice 3** Écriture complexe de transformations

1. Soit  $f$  la transformation du plan complexe qui à  $M(z)$  associe  $M'(z')$  tel que :

$$z' = az + 3i$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$  lorsque  $a = 2$ , puis lorsque  $a = -i$

2. On donne  $A(1)$ ,  $B(2 + i)$ ,  $A'(2i)$  et  $B'(1 + i)$ .

Vérifier que  $AB = A'B'$ .

Démontrer qu'il existe une unique rotation  $r$  telle que  $r(A) = A'$  et  $r(B) = B'$ . La déterminer.

### **Exercice 4** Lieux de points

Soit  $z$  un nombre complexe différent de  $1$ . On note  $M$  le point du plan complexe d'affixe  $z$ . On pose  $Z = \frac{z+i}{z-1}$ .

Déterminer l'ensemble :

1.  $E$  des points  $M$  tels que  $Z$  soit réel.
2.  $F$  des points  $M$  tels que  $|Z| = 1$ .
3.  $G$  des points  $M$  tels que  $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$   $[2\pi]$ .

**Exercice 5** Utilisation des nombres complexes pour établir une propriété algébrique

Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$ . On suppose que  $a$  et  $b$  sont la somme de deux carrés :

$$\text{il existe } x, y \in \mathbb{Z} \text{ tels que } a = x^2 + y^2 \text{ et il existe } z, t \in \mathbb{Z} \text{ tels que } b = z^2 + t^2$$

Démontrer que le produit  $ab$  est encore la somme de deux carrés. (Idée : écrire  $(x^2 + y^2) = |x + iy|^2$  etc...)

**Exercice 6** Identité du parallélogramme

Démontrer que pour tous nombres complexes  $Z$  et  $Z'$ , on a :

$$|Z + Z'|^2 + |Z - Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2$$

$$\text{(Indication : utiliser la relation : } |Z|^2 = Z\bar{Z} \text{)}$$

Interpréter géométriquement.

**Exercice 7** Racines de l'unité. Applications

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle racine  $n^{\text{ème}}$  de l'unité tout nombre complexe  $z$  tel que :

$$z^n = 1$$

On note  $\mathbb{U}_n$  l'ensemble des racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité. Par exemple,  $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$ .

1. Démontrer que :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i \frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

Démontrer que la somme des racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité est nulle.

Démontrer que, dans repère orthonormal direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , les images  $A_k$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ) des nombres

$\omega_k = e^{i \frac{2ik\pi}{n}}$  sont les sommets d'un polygone régulier.

2. Applications :

a) Soit  $Z \in \mathbb{C}$ . On appelle racine  $n^{\text{ème}}$  de  $Z$  tout nombre complexe tel que :

$$z^n = Z$$

Soit  $R = |Z|$  et  $\Theta$  un argument de  $Z$ . Démontrer que  $Z$  admet les  $n$  racines  $n^{\text{èmes}}$  suivantes :

$$\sqrt[n]{R} e^{i \left( \frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)}, 0 \leq k \leq n-1$$

b) Soit  $f$  la fonction polynôme définie par :

$$f(x) = x^4 + 1$$

Déterminer les racines quatrièmes de  $-1$  puis en déduire que  $f$  peut s'écrire comme un produit de deux fonctions polynômes de degré 2 à coefficients réels.

c) Soit  $z$  un nombre complexe tel que :  $1 + z^4 + z^8 = 0$

Démontrer que  $z$  est une racine  $12^{\text{ème}}$  de l'unité.

### **Exercice 8** Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Démontrer qu'il existe deux réels  $R$  et  $\theta$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \theta)$$

Application : résoudre, sur  $\mathbb{R}$ , l'équation :  $\cos x + \sin x = 1$

### **Exercice 9** Calcul de la valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$

Pour connaître le but de cet exercice, se reporter à la question 5.

1. Résoudre, dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ , le système suivant :

$$\begin{cases} u + v = -\frac{1}{2} \\ uv = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

2. On pose  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ . Démontrer que :  $\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$

En déduire (à l'aide des formules d'Euler) que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$$

3. Démontrer que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

et

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

4. En déduire que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$$

5. Démontrer que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

### **Exercice 10** Carrés et parallélogramme

$ABC$  est un triangle de sens direct.

$DBA$  est un triangle isocèle et rectangle en  $D$  de sens direct.

$ACE$  est un triangle isocèle et rectangle en  $E$  de sens direct.

On construit le point  $L$  tel que  $\vec{CL} = \vec{DB}$ .

1. Faire une figure.

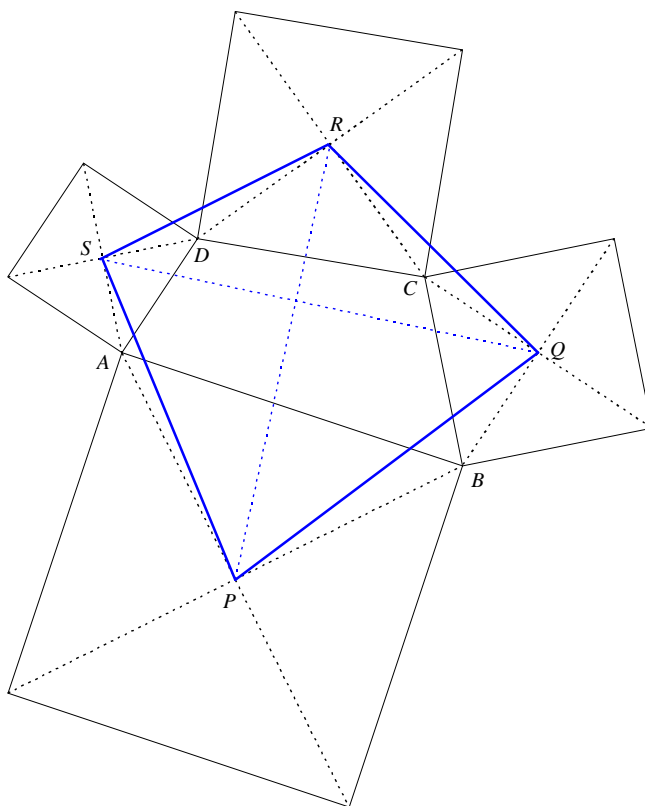
2. Démontrer que  $EDL$  est un triangle rectangle isocèle en  $E$  de sens direct.

**Exercice 11** Des carrés autour d'un quadrilatère (Théorème de Von Aubel)

On considère un quadrilatère  $ABCD$  de sens direct.

On construit quatre carrés de centres respectifs  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  et  $S$  qui s'appuient extérieurement sur les côtés  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$  du quadrilatère  $ABCD$ . (Voir figure)

Le but du problème est de démontrer que les diagonales du quadrilatère  $PQRS$  sont perpendiculaires et de même longueur.



On note  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  et  $s$  les affixes respectives des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  et  $S$  dans un repère orthonormé  $(O, \overline{e_1}, \overline{e_2})$  de sens direct.

1. Démontrer que dans le carré construit sur  $[AB]$ , on a :

$$p = \frac{a - ib}{1 - i}$$

Établir des relations analogues pour  $q$ ,  $r$  et  $s$  en raisonnant dans les trois autres carrés.

2. Calculer :

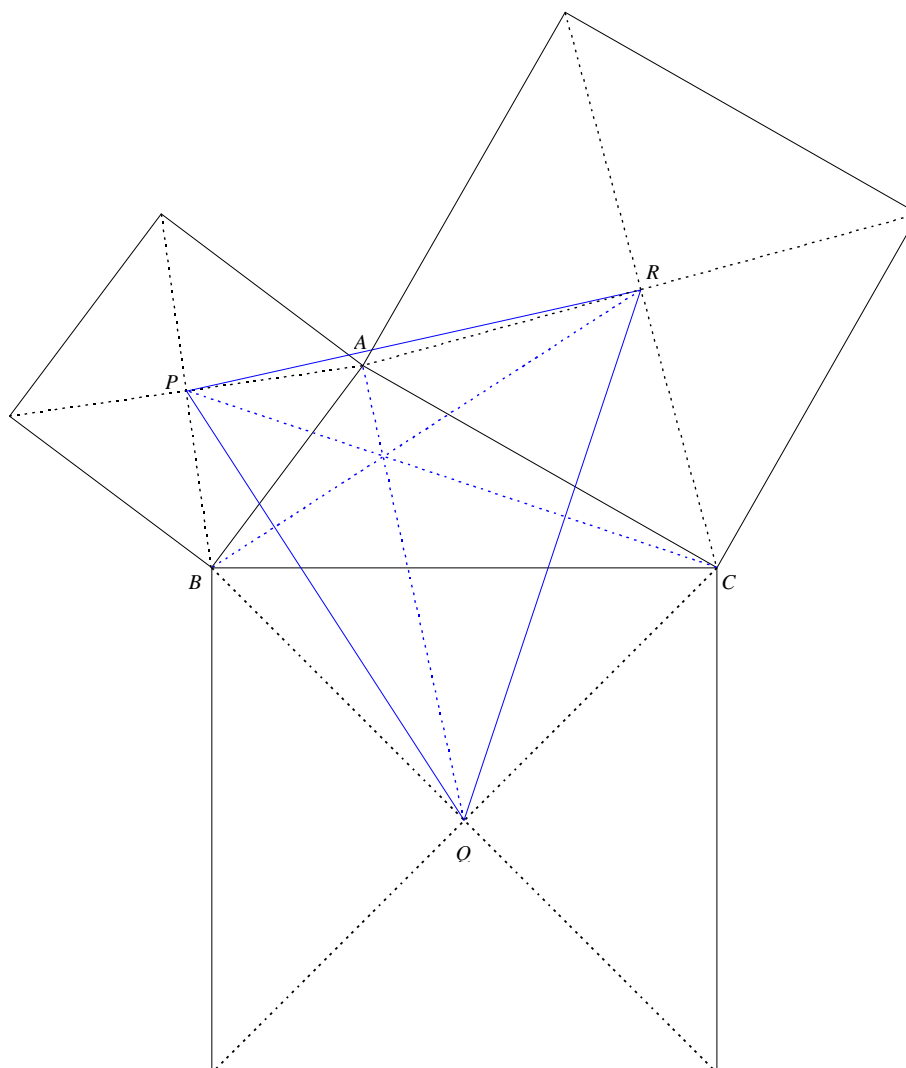
$$\frac{s - q}{r - p}$$

Conclure.

**Exercice 12** Des carrés autour d'un triangle (Point de Vecten)

On considère un triangle  $ABC$  de sens direct.

On construit trois carrés de centres respectifs  $P$ ,  $Q$  et  $R$  qui s'appuient extérieurement sur les côtés  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[CA]$  du triangle  $ABC$ . (Voir figure)



On note  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $p$ ,  $q$  et  $r$  les affixes respectives des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $P$ ,  $Q$  et  $R$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  de sens direct.

1. Démontrer que les triangles  $ABC$  et  $PQR$  ont le même centre de gravité.
2. Démontrer que dans le carré construit sur  $[AB]$ , on a :

$$p = \frac{a - ib}{1 - i}$$

Établir des relations analogues pour  $q$  et  $r$  en raisonnant dans les deux autres carrés.

3. Démontrer que les droites  $(AQ)$  et  $(PR)$  sont perpendiculaires  
En déduire que les droites  $(AQ)$ ,  $(BR)$  et  $(CP)$  sont concourantes.

Information : ce point de concours s'appelle "point de Vecten" du triangle  $ABC$ .

### Exercice 13 Théorème de Napoléon

On munit le plan d'un repère orthonormé  $(O, \overline{e_1}, \overline{e_2})$  de sens direct.

#### PARTIE A : des caractérisations du triangle équilatéral

On note  $\mathbf{j} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ . Soient  $U, V$  et  $W$  trois points du plan d'affixes respectives  $u, v$  et  $w$ .

1. Démontrer l'équivalence suivante :

$$UVW \text{ est équilatéral de sens direct } \Leftrightarrow u - v = -\mathbf{j}^2(w - v)$$

2. Démontrer l'équivalence suivante :

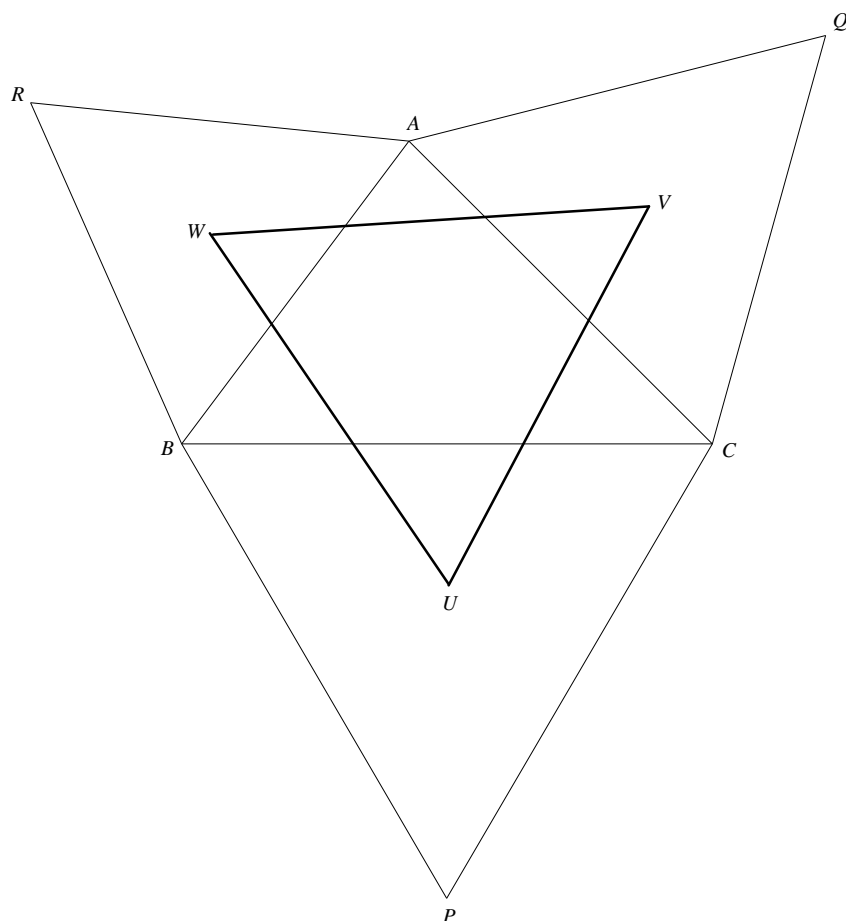
$$UVW \text{ est équilatéral de sens direct } \Leftrightarrow u + \mathbf{j}v + \mathbf{j}^2w = 0$$

#### PARTIE B : démonstration du théorème de Napoléon

$ABC$  est un triangle quelconque de sens direct. On construit les points  $P, Q$  et  $R$  tels que  $BPC, CQA$  et  $ARB$  soient des triangles équilatéraux de sens direct.

On note  $U, V$  et  $W$  les centres de gravité de  $BPC, CQA$  et  $ARB$  respectivement.

Démontrer que  $UVW$  est équilatéral de même centre de gravité que  $ABC$ .



**Exercice 14** *Nombres complexes et suites*

Le but de cet exercice est l'étude de la suite  $(S_n)$  définie, pour  $n \geq 2$ , par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

1. On pose, pour  $n \geq 2$  :

$$z = e^{\frac{i\pi}{n}}$$

Calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

2. Montrer que, pour  $n \geq 2$  :

$$\frac{2}{1-z} = 1 + i \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

3. En déduire que, pour  $n \geq 2$  :

$$S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

4. Étudier la limite de la suite  $(u_n)$  définie, pour  $n \geq 2$ , par :

$$u_n = \frac{S_n}{n}$$

## EXERCICES RÉDIGÉS SUR LES NOMBRES COMPLEXES : SOLUTIONS

### Exercice 1 Valeur exacte du cosinus et du sinus de $\pi/12$

1. On a : 
$$z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Forme algébrique de  $z_1 z_2$  :

$$z_1 z_2 = \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Forme exponentielle de  $z_1 z_2$  : 
$$z_1 z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Forme trigonométrique de  $z_1 z_2$  : 
$$z_1 z_2 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$$

3. En identifiant la forme trigonométrique avec la forme algébrique de  $z_1 z_2$ , il vient :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

### Exercice 2 Des pistes pour démontrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur

D'une part : 
$$Z \text{ est réel} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z - \bar{Z} = 0 \Leftrightarrow Z = \bar{Z}$$

$$Z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z + \bar{Z} = 0$$

D'autre part :

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = 0 [2\pi] \text{ ou } \arg(Z) = \pi [2\pi]) \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = 0 [\pi])$$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } \arg(Z) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]) \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} [\pi])$$

Applications :

1. D'après ce qui précède et d'après les propriétés de la conjugaison :

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow Z = \bar{Z} \Leftrightarrow z^2 + 2z - 3 = \bar{z}^2 + 2\bar{z} - 3 \Leftrightarrow (z - \bar{z})[(z + \bar{z}) + 2] = 0$$

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow (z = \bar{z} \text{ ou } 2\text{Re}(z) = -2) \Leftrightarrow (z \text{ réel ou } \text{Re}(z) = -1)$$

L'ensemble  $E$  recherché est l'union des deux droites d'équations respectives  $y = 0$  et  $x = -1$ .

2. Détermination de  $E$  :

On rappelle que  $z \neq i$ . Autrement dit  $M$  est distinct de  $A$ . On a alors :

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg Z = 0 [\pi]) \Leftrightarrow (z = 1 \text{ ou } \arg \left( \frac{z - z_B}{z - z_A} \right) = 0 [\pi]) \Leftrightarrow (M = B \text{ ou } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = 0 [\pi])$$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, M \text{ et } B \text{ alignés, } M \neq A$$

On en déduit :  $E$  est la droite  $(AB)$  privée du point  $A$

Détermination de  $F$  :

On rappelle que  $z \neq i$ . On a alors :

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} [\pi]) \Leftrightarrow (z = 1 \text{ ou } \arg \left( \frac{z - z_B}{z - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} [\pi])$$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (M = B \text{ ou } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} [\pi])$$

D'où :  $F$  est le cercle de diamètre  $[AB]$  privé du point  $A$



### Exercice 3 Écriture complexe de transformations

1.  $a = 2$

Montrons que  $f$  admet un unique point invariant. Pour cela on résout l'équation :

$$\begin{aligned}f(\omega) &= \omega \\ \omega &= 2\omega + 3i \\ \omega &= -3i\end{aligned}$$

La transformation  $f$  admet un unique point invariant  $\Omega$  d'affixe  $\omega = -3i$ .

Pour déterminer la nature de  $f$  on exprime  $z' - \omega$  en fonction de  $z - \omega$ .

On a :

$$\begin{cases} z' = 2z + 3i \\ \omega = 2\omega + 3i \end{cases}$$

En soustrayant, membre à membre, ces deux égalités, on obtient :

$$z' - \omega = 2(z - \omega)$$

On en déduit, grâce à son écriture complexe, que  $f$  est l'homothétie de centre  $\Omega(-3i)$  et de rapport  $k = 2$ .

$a = -i$

Montrons que  $f$  admet un unique point invariant. Pour cela on résout l'équation :

$$\begin{aligned}f(\omega) &= \omega \\ \omega &= -i\omega + 3i \\ \omega &= \frac{3i}{1+i} = \frac{3+3i}{2}\end{aligned}$$

La transformation  $f$  admet un unique point invariant  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{3+3i}{2}$ .

Pour déterminer la nature de  $f$  on exprime  $z' - \omega$  en fonction de  $z - \omega$ .

On a :

$$\begin{cases} z' = -iz + 3i \\ \omega = i\omega + 3i \end{cases}$$

En soustrayant, membre à membre, ces deux égalités, on obtient :

$$z' - \omega = -i(z - \omega)$$

On en déduit, grâce à son écriture complexe, que  $f$  est rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

2. On a :  $AB = A'B' = \sqrt{2}$

Soit  $r$  une rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$ . Son écriture complexe est :

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$$

Montrons que l'on peut choisir, de manière unique,  $\omega \in \mathbb{C}$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$  tels que  $r(A) = A'$  et  $r(B) = B'$ .

La condition  $r(A) = A'$  donne :  $2i - \omega = e^{i\theta} (1 - \omega)$

La condition  $r(B) = B'$  donne :  $1 + i - \omega = e^{i\theta} (2 + i - \omega)$

En soustrayant membre à membre :  $i - 1 = e^{i\theta} (-1 - i)$

D'où :

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= -i \\ \theta &= -\frac{\pi}{2} [2\pi]\end{aligned}$$

On en déduit :  $2i - \omega = -i(1 - \omega)$

$$\omega = \frac{3+3i}{2}$$

La transformation cherchée est la rotation de centre  $\Omega$  d'affixe  $\frac{3+3i}{2}$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

#### Exercice 4 Lieux de points

L'idée est de se ramener à une expression du type  $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$  afin de pouvoir l'interpréter géométriquement.

Introduisons pour y parvenir le point  $A$  d'affixe  $-i$  et le point  $B$  d'affixe  $1$ .

1. On a ainsi :

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = 0 [\pi]) \Leftrightarrow (z = z_A \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 [\pi])$$

Or,  $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 [\pi] \Leftrightarrow M$  appartient à la droite  $(AB)$  privée de  $A$  et  $B$

On en déduit finalement :

$E$  est la droite  $(AB)$  privée de  $B$

2.  $|Z| = 2 \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M$  appartient à la médiatrice de  $[AB]$

$F$  est la médiatrice de  $[AB]$

3.  $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$G$  est le demi-cercle de diamètre  $[AB]$ , privé de  $B$ , tel que le triangle  $AMB$  soit direct

#### Exercice 5 Utilisation des nombres complexes pour établir une propriété algébrique

On a :  $ab = |x + iy|^2 |z + it|^2$

Et d'après les propriétés des modules :  $ab = |(x + iy)(z + it)|^2$

$$ab = |(xz - yt) + i(yz + xt)|^2$$

$$ab = (xz - yt)^2 + (yz + xt)^2$$

Or,  $xz - yt \in \mathbb{Z}$  et  $yz + xt \in \mathbb{Z}$ , donc  $ab$  est aussi la somme de deux carrés.

#### Exercice 6 Identité du parallélogramme

On a :

$$|Z + Z'|^2 + |Z - Z'|^2 = (Z + Z')(\bar{Z} + \bar{Z}') + (Z - Z')(\bar{Z} - \bar{Z}') = Z\bar{Z} + Z\bar{Z}' + Z'\bar{Z} + Z'\bar{Z}' + Z\bar{Z} - Z\bar{Z}' - Z'\bar{Z} + Z'\bar{Z}'$$

$$|Z + Z'|^2 + |Z - Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2$$

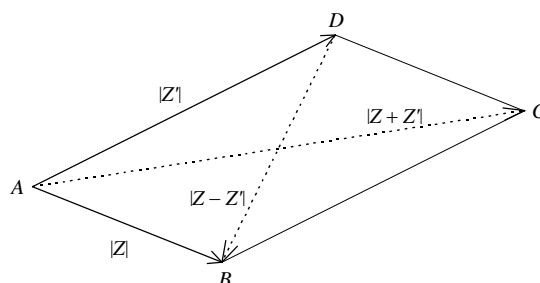
Interprétation :

Soit  $ABCD$  un parallélogramme. Notons  $Z$  l'affixe de  $\overrightarrow{AB}$  et  $Z'$  l'affixe de  $\overrightarrow{AD}$ .

On a donc :

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$$

Autrement dit : dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés



**Exercice 7** Racines de l'unité. Applications

1. Déjà, pour tout nombre complexe  $\omega_k$  défini pour  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  par  $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ , on a :

$$\omega_k^n = e^{2ik\pi} = 1$$

Les éléments de  $\mathbb{U}_n$  sont bien des racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité.

Réciproquement, soit  $z$  une racine  $n^{\text{ème}}$  de l'unité :

$$z^n = 1$$

Notons  $r$  le module de  $z$  et  $\theta$  l'argument de  $z$  situé dans  $[0, 2\pi[$ . Ainsi, on a :

$$r^n e^{in\theta} = 1 = e^{i0}$$

Or, deux nombres complexes égaux ont même module et des arguments égaux (modulo  $2\pi$ ), d'où :

$$r^n = 1 \text{ et } n\theta \equiv 0 [2\pi]$$

Comme  $r$  est un réel positif, on a nécessairement  $r = 1$ . D'autre part, l'égalité  $n\theta \equiv 0 [2\pi]$  signifie qu'il existe un entier relatif  $k$  tel que :

$$n\theta = 2k\pi$$

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}$$

Et comme on a choisi  $\theta \in [0, 2\pi[$ , il vient :

$$0 \leq k < n$$

Et comme  $k$  est un entier :

$$0 \leq k \leq n-1$$

Il y a donc exactement  $n$  racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité qui sont les nombres  $\omega_k$  pour  $0 \leq k \leq n-1$  :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

Avec les notations précédentes, et en notant  $\omega = \omega_1$ , on constate que :

$$\omega_k = \omega^k$$

La formule de sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique donne alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0 \text{ puisque } \omega^n = 1$$

De plus, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a :

$$(\overline{OA_k}, \overline{OA_{k+1}}) = \arg\left(\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\right) = e^{\frac{2i\pi}{n}} [2\pi]$$

On a noté, par commodité :  
 $\omega_n = \omega_0 = 1$  et  $A_n = A_0$

On en déduit que  $A_0A_1\dots A_{n-1}$  est un polygone régulier.

2. Applications :

a) On procède comme pour les racines de l'unité. Soit  $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ .

On a :

$$z^n = Z \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = R e^{i\Theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\theta \equiv \Theta [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \theta \equiv \frac{\Theta}{n} \left[ \frac{2\pi}{n} \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Et comme on peut toujours choisir  $\theta \in \left[ \frac{\Theta}{n}, \frac{\Theta}{n} + 2\pi \right[$ , il vient :

$$0 \leq k \leq n-1$$

Les racines  $n^{\text{èmes}}$  de  $Z$  sont donc les  $n$  nombres complexes suivants :

$$\sqrt[n]{\text{Re}} \, i^{\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Remarque : si on connaît déjà une racine  $n^{\text{ème}}$  particulière  $z_0$  de  $Z$ , on peut en déduire toutes les autres en multipliant  $z_0$  par les racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité. En effet :

$$(z_0^n = Z \text{ et } z^n = Z) \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ tel que } \frac{z}{z_0} = \omega_k$$

D'où :  $(z_0^n = Z \text{ et } z^n = Z) \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ tel que } z = \omega_k z_0$

b) Les racines quatrièmes de l'unité sont :  $1, -1, i$  et  $-i$

On connaît une racine quatrième particulière de  $-1$  :

$$e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Les racines quatrièmes de  $-1$  sont donc :

$$e^{i\frac{\pi}{4}}, -e^{i\frac{\pi}{4}}, ie^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } -ie^{i\frac{\pi}{4}}$$

C'est-à-dire :

$$e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ et } e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

Or, les racines de  $x^4 + 1$  sont précisément les racines quatrièmes de  $-1$ . On a donc la factorisation :

$$f(x) = x^4 + 1 = \left(x - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \left(x - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \left(x - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \left(x - e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)$$

En regroupant les racines deux par deux (en choisissant celles qui sont conjuguées), on obtient :

$$f(x) = \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{4} + 1\right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{3\pi}{4} + 1\right)$$

$$f(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

Nota : les amateurs de forme canonique peuvent retrouver ce résultat sans passer par les complexes :

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

c) On sait que :  $1 + z^4 + z^8 = 0$

En multipliant par  $z$  :  $z + z^5 + z^9 = 0$

Puis encore :  $z^2 + z^6 + z^{10} = 0$

$$z^3 + z^7 + z^{11} = 0$$

En sommant les quatre égalités, membre à membre :

$$\sum_{k=0}^{11} z^k = 0$$

Il est clair que  $z$  ne peut pas être égal à 1. La formule de sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique donne alors :

$$\frac{1-z^{12}}{1-z} = 0$$

D'où :  $z^{12} = 1$

Donc  $z$  est une racine douzième de l'unité.

**Exercice 8** Transformation de  $a \cos x + b \sin x$

Si  $a = b = 0$ , il suffit de choisir  $R = 0$  et  $\theta$  quelconque.

Supposons  $(a, b) \neq (0, 0)$  et posons  $Z = a + ib$ . On a donc  $Z \neq 0$ .

Notons :  $R = |Z|$  et  $\theta$  un argument de  $Z$ .

On sait qu'alors :  $a = |Z| \cos \theta$  et  $b = |Z| \sin \theta$

On a ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$a \cos x + b \sin x = R(\cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x)$$

Et d'après les formules d'additions :

$$a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \theta)$$

Application :

En utilisant ce qui précède en posant  $Z = 1 + i$  ( $R = \sqrt{2}$  et  $\theta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ ), l'équation proposée s'écrit :

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$

D'où :  $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} [2\pi]$  ou  $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

$$x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } x = 0 [2\pi]$$

**Exercice 9** Calcul de la valeur exacte de  $\cos(2\pi/5)$  et  $\cos(4\pi/5)$

1. On procède par substitution. La première équation donne :

$$v = -u - \frac{1}{2}$$

En remplaçant  $v$  par  $-u - \frac{1}{2}$  dans la seconde équation, il vient :

$$u\left(-u - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

En multipliant par  $-4$  et en développant :

$$4u^2 + 2u - 1 = 0$$

On obtient une équation du second degré. Son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 20$$

Comme  $\Delta > 0$ , il y a donc deux racines réelles distinctes :

$$u_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ et } u_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

On en déduit les valeurs de  $v$  correspondantes :

$$v_1 = -u_1 - \frac{1}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad v_2 = -u_2 - \frac{1}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

Conclusion : le système admet deux couples de solutions :

$$S = \left\{ \left( \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \right); \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \right) \right\}$$

2. Il s'agit de la somme de cinq termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ . On a donc :

$$\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0 \quad \text{car} \quad \omega^5 = 1$$

D'où : 
$$1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = 0$$

Or : 
$$\frac{6\pi}{5} \equiv -\frac{4\pi}{5} [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{8\pi}{5} \equiv -\frac{2\pi}{5} [2\pi]$$

On peut donc écrire : 
$$1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 0$$

Et d'après les formules d'Euler : 
$$1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$$

3. D'après les formules d'additions :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

4. En additionnant, membre à membre, les deux égalités ci-dessus et en utilisant la question 2. :

$$-\frac{1}{2} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$$

5. Posons  $u = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  et  $v = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ . On constate que :

$$\begin{cases} u + v = -\frac{1}{2} \\ uv = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

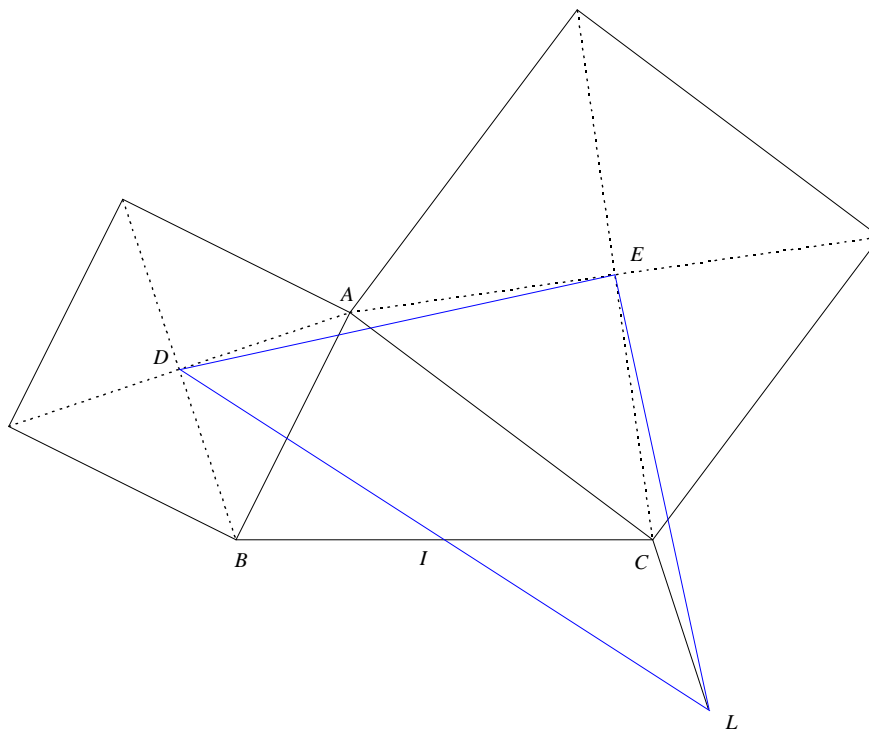
Or,  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$  car  $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$  car  $\frac{4\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ .

D'après la question 1, on en déduit :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

## Exercice 10 Carrés et parallélogramme

### 1. Figure



2. Munissons le plan d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

Notons  $a, b, c, d, e$  et  $l$  les affixes respectives des points  $A, B, C, D, E$  et  $L$ .

Comme  $A$  est l'image de  $B$  par la rotation de centre  $D$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  :

$$a - d = \mathbf{i}(b - d)$$

De même dans  $ACE$  :

$$c - e = \mathbf{i}(a - e)$$

Enfin, puisque  $L$  est l'image de  $C$  par la translation de vecteur  $\vec{DB}$  :

$$l = c + b - d$$

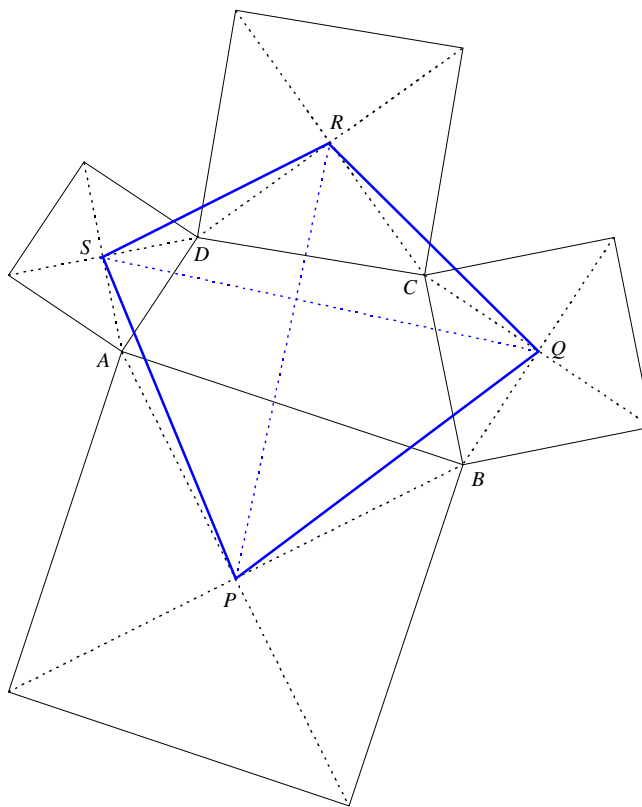
Exprimons  $l - e$  en fonction de  $d - e$  :

$$l - e = c - e + b - d = \mathbf{i}(a - e) - \mathbf{i}(a - d) = \mathbf{i}(d - e)$$

Donc  $L$  est l'image de  $D$  par la rotation de centre  $E$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

Le triangle  $EDL$  est bien rectangle isocèle en  $E$  de sens direct.

**Exercice 11** Des carrés autour d'un quadrilatère (Théorème de Von Aubel)



1. Puisque  $ABCD$  est de sens direct et que  $P$  est le centre du carré construit extérieurement sur  $[AB]$ , on peut affirmer que  $A$  est l'image de  $B$  par la rotation de centre  $P$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  :

$$a - p = \mathbf{i}(b - p)$$

$$a - \mathbf{i}b = p - \mathbf{i}p$$

D'où :

$$p = \frac{a - \mathbf{i}b}{1 - \mathbf{i}}$$

On obtient de même :

$$q = \frac{b - \mathbf{i}c}{1 - \mathbf{i}}, \quad r = \frac{c - \mathbf{i}d}{1 - \mathbf{i}} \quad \text{et} \quad s = \frac{d - \mathbf{i}a}{1 - \mathbf{i}}$$

2. On a alors :
- $$\frac{s - q}{r - p} = \frac{d - b + \mathbf{i}(c - a)}{c - a + \mathbf{i}(b - d)} = \mathbf{i}$$

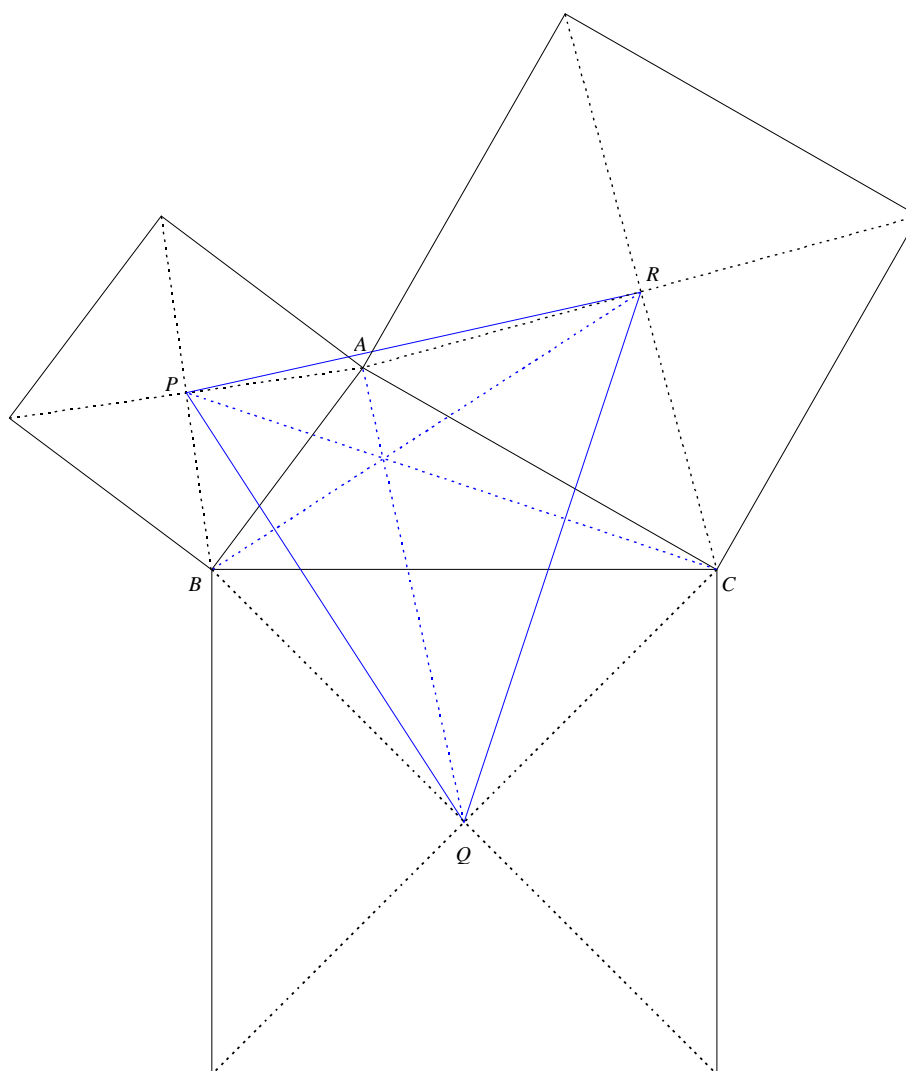
On en déduit, d'une part, que les droites  $(PR)$  et  $(QS)$  sont perpendiculaires.

De plus, comme  $\left| \frac{s - q}{r - p} \right| = 1$ , on a :  $PR = QS$

Les diagonales du quadrilatère  $PQRS$  sont donc perpendiculaires et de même longueur.



**Exercice 12** Des carrés autour d'un triangle (Point de Vecten)



1. Comme  $A$  est l'image de  $B$  par la rotation de centre  $P$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  :

$$a - p = \mathbf{i}(b - p)$$

De même :

$$b - q = \mathbf{i}(c - q)$$

$$c - r = \mathbf{i}(a - r)$$

En additionnant membre à membre ces trois égalités :

$$a + b + c - (p + q + r) = \mathbf{i}(a + b + c - (p + q + r))$$

D'où :

$$a + b + c = p + q + r$$

2. De la relation  $a - p = \mathbf{i}(b - p)$  on déduit :  $p = \frac{a - \mathbf{i}b}{1 - \mathbf{i}}$

De même :

$$q = \frac{b - \mathbf{i}c}{1 - \mathbf{i}} \text{ et } r = \frac{c - \mathbf{i}a}{1 - \mathbf{i}}$$

3. On a : 
$$\frac{r-p}{q-a} = \frac{c-a+i(b-a)}{b-a+i(a-c)} = i$$

On en déduit que les droites  $(PR)$  et  $(AQ)$  sont perpendiculaires. Autrement dit :

$(AQ)$  est la hauteur issue de  $A$  dans le triangle  $PQR$

En raisonnant de même par rapport aux autres côtés, on constate que  $(BR)$  et  $(CP)$  sont les deux autres hauteurs du triangle  $PQR$ .

Les droites  $(AQ)$ ,  $(BR)$  et  $(CP)$  sont donc concourantes.

**Exercice 13** *Théorème de Napoléon*

**PARTIE A** : des caractérisations du triangle équilatéral

1. Si  $UVW$  est équilatéral de sens direct, alors  $U$  est l'image de  $W$  par la rotation de centre  $V$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  :

$$u - v = e^{\frac{i\pi}{3}} (w - v)$$

Or :

$$-j^2 = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = -e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{i\pi} e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

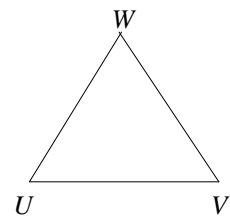
D'où :

$$u - v = -j^2(w - v)$$

Réciproquement, supposons :

$$u - v = -j^2(w - v) = e^{\frac{i\pi}{3}} (w - v)$$

Alors,  $U$  est l'image de  $W$  par la rotation de centre  $V$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  donc  $UVW$  est équilatéral de sens direct.



2. Supposons  $UVW$  équilatéral de sens direct. D'après ce qui précède, on a :

$$u - v = -j^2(w - v)$$

$$u + (-1 - j^2)v + j^2w = 0$$

Or,  $1 + j + j^2 = 0$  donc :

$$u + jv + j^2w = 0$$

Réciproquement, supposons :

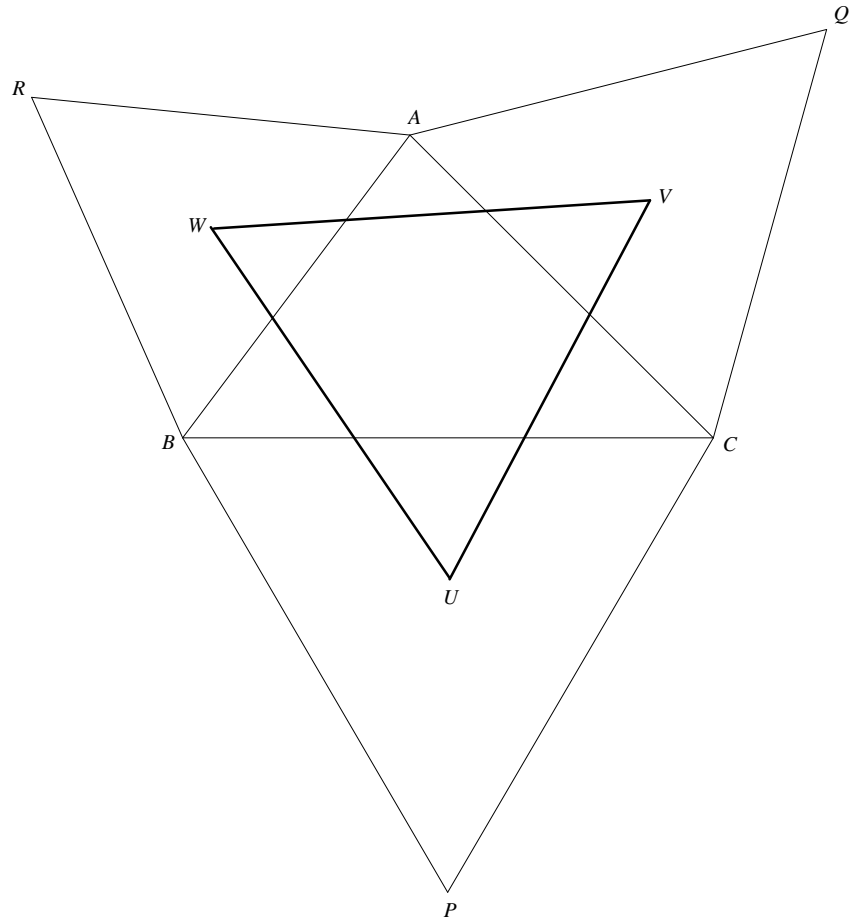
$$u + jv + j^2w = 0$$

Alors, par le même calcul :

$$u - v = -j^2(w - v)$$

Et d'après la question 1. :

$UVW$  équilatéral de sens direct



**PARTIE B : démonstration du théorème de Napoléon**

Par hypothèse, on a :

$$a - w = \mathbf{j}(b - w) \quad (E_1)$$

$$b - u = \mathbf{j}(c - u) \quad (E_2)$$

$$c - v = \mathbf{j}(a - v) \quad (E_3)$$

En additionnant, membre à membre, les trois égalités, il vient :

$$a + b + c - (u + v + w) = \mathbf{j}(a + b + c - (u + v + w))$$

D'où :

$$a + b + c = u + v + w$$

Ce qui prouve déjà que  $UVW$  a le même centre de gravité que  $ABC$ .

De  $(E_1)$  on déduit :

$$w = \frac{a - \mathbf{j}b}{1 - \mathbf{j}}$$

De même avec  $(E_2)$  et  $(E_3)$  :

$$u = \frac{b - \mathbf{j}c}{1 - \mathbf{j}}$$

$$v = \frac{c - \mathbf{j}a}{1 - \mathbf{j}}$$

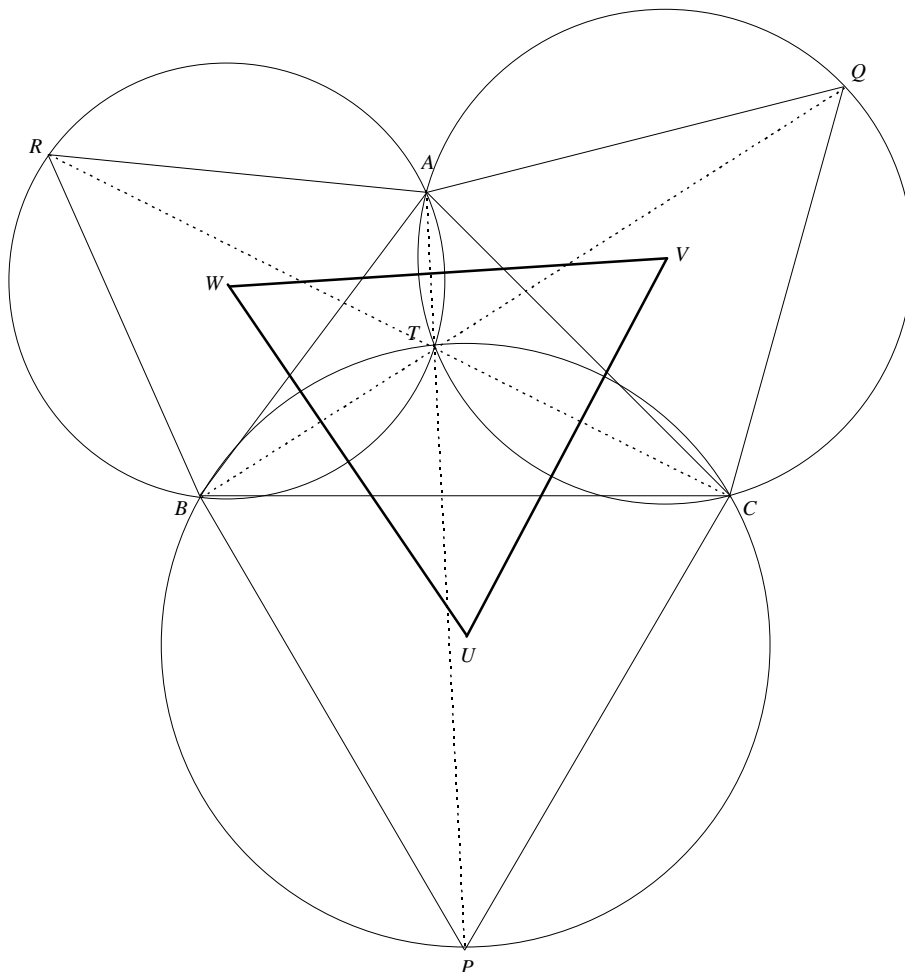
On calcule maintenant :

$$u + \mathbf{j}v + \mathbf{j}^2w = \frac{a - \mathbf{j}b + \mathbf{j}b - \mathbf{j}^2c + \mathbf{j}^2c - a}{1 - \mathbf{j}} = 0$$

Donc :

$UVW$  est équilatéral de sens direct

Remarque : pour aller plus loin avec cette configuration, on peut aussi démontrer que les droites  $(AP)$ ,  $(BQ)$  et  $(CR)$  sont concourantes en un point  $T$  appelé "point de Torricelli". Ce point  $T$  possède de belles propriétés : il est le point de concours des cercles circonscrits aux triangles  $ABC$ ,  $ABR$ ,  $ACQ$  et  $BCP$ , c'est aussi le point qui rend minimal la distance  $MA + MB + MC$  (lorsque les angles du triangle sont inférieurs à  $120^\circ$ ).



### Exercice 14 Nombres complexes et suites

1. Il s'agit d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $z \neq 1$ , donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{2}{1-z} \quad \text{car } z^n = e^{i\pi} = -1$$

2. On a, pour tout  $n \geq 2$  :

$$1-z = 1 - e^{i\frac{\pi}{2n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}} \left( e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}} \right) = -2i e^{i\frac{\pi}{2n}} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

D'où :

$$\frac{2}{1-z} = \frac{i e^{i\frac{\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{i \left( \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1 + i \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

3. En identifiant les parties imaginaires, on obtient :

$$S_n = \operatorname{Im}\left(\frac{2}{1-z}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

4. On a, pour tout  $n \geq 2$  :

$$u_n = \frac{1}{n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$u_n = \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Or, on sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1$$

$$\left(\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$$

Et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 1$ , il vient finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{\pi}$$

On dit que la suite  $(S_n)$  converge "en moyenne" vers  $\frac{2}{\pi}$ .