# Intégration : exercices supplémentaires

Intégrer en utilisant les différentes méthodes disponibles (recherche directe de la primitive, par substitution, par parties) avec des fonctions trigonométriques, logarithmes et rationnelles) :

**▽▽▽ EXERCICE 1**

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+9}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{4x+8}{(x^2+4x+9)^3}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{4x+8}{x^2+4x+9}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x-12}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2-1}{x^3-4x^2-3x+18}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$

8) $\displaystyle\int x\cdot\ln(x)\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{(x+1)^3}\,dx$

10) $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

# Correction

**∇∇∇ EXERCICE 1**

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+9}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+5}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{5}\int \frac{1\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+c \qquad \begin{pmatrix} u &= \frac{x+2}{\sqrt{5}} \\ du &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,dx \end{pmatrix}$

2) $\displaystyle\int \frac{4x+8}{(x^2+4x+9)^3}\,dx = 2\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+9)^3}\,dx = 2\cdot\frac{1}{-2}\frac{1}{(x^2+4x+9)^2}+c = -\frac{1}{(x^2+4x+9)^2}+c$

3) $\displaystyle\int \frac{4x+8}{x^2+4x+9}\,dx = 2\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+9)}\,dx = 2\ln(x^2+4x+9)+c$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x-12}\,dx = \int \frac{1}{(x+6)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{1/8}{x-2}+\frac{-1/8}{x+6}\right)\,dx = \frac{1}{8}\left(\ln(x-2)-\ln(x+6)\right)+c$

$\frac{1}{(x-2)(x+6)} = \frac{A}{x-2}+\frac{1}{x+6} = \frac{A(x+6)+B(x-2)}{(x+6)(x-2)} = \frac{(A+B)x+6A-2B}{(x+6)(x-2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \quad \Rightarrow B=-A \\ 6A-2B=1 \Rightarrow 6A+2A=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{8}$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{3}\frac{3}{2}\int \frac{2/3}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x}{3}\right)+c \qquad \begin{pmatrix} u &= \frac{2x}{3} \\ du &= \frac{2}{3}\,dx \end{pmatrix}$

6) $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2-1}{x^3-4x^2-3x+18}\,dx = \int \left(2+\frac{6x^2+6x-37}{x^3-4x^2-3x+18}\right) = \int \left(2+\frac{7}{(x-3)^2}+\frac{7}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)\,dx$

$\displaystyle = 2x-\frac{7}{x-3}+7\ln(x-3)-\ln(x+2)+c$

$\displaystyle\frac{6x^2+6x-37}{(x-3)^2\cdot(x+2)} = \left(2+\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x-2}\right) = \frac{A(x-3)(x-2)+B(x-2)+C(x-3)^2}{(x-3)^2\cdot(x+2)}$

la TI89 permet de trouver cette réponse avec F2 (Algèbre) Expand ($\frac{6x^2+6x-37}{x^3-4x^2-3x+18}$)

7) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{-x+1}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}\right)\,dx = \arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln(x-1)+c$

$\displaystyle\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{(A+C)x^2+(B-A)x+C-B}{(x^2+1)(x-1)}$

$\begin{cases} A+C=0 \Rightarrow A=-C \\ B-A=2 \\ C-B=0 \;\Rightarrow B=C \end{cases} \Rightarrow C-(-C)=2 \Rightarrow C=1,\quad A=-1,\quad B=1$

8) $\displaystyle\int x\cdot\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x)-\int \frac{1}{2}x^2\cdot(\ln(x))'\,dx == \frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x)-\frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{x^2}{4}+c$

9) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{(x+1)^3}\,dx = \int \frac{(u-1)^2+4}{u^3}\,du = \int \frac{u^2-2u+5}{u^3}\,du \qquad \begin{pmatrix} u &= x+1 \Rightarrow x = u-1 \\ du = dx & \end{pmatrix}$

$$= \int \frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} + \frac{5}{u^3}\,du = \ln|u| + \frac{2}{u} + \frac{1}{-2}\cdot\frac{5}{u^2} + c = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{5/2}{(x+1)^2} + c$$

puisqu'il n'y a pas de bornes où il faut changer les valeurs en raison du changement de variables, il faut rétablir la variable $x$ dans le résultat

l'exercice peut aussi se faire avec les fractions partielles : $\dfrac{x^2+4}{(x+1)^3} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{(x+1)^3}$

on trouve $\dfrac{x^2+4}{(x+1)^3} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2} + \dfrac{5}{(x+1)^3}$

10) $\displaystyle\int \sqrt{16-x^2}\,dx = \int 4\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}\,dx = 4\int 4\cos(u)\sqrt{1-(\sin(u))^2}\,du = 16\int \cos(u)\sqrt{\cos^2(u)}\,du \qquad \begin{pmatrix} \sin(u) &= x/4 \\ \cos(u)\,du &= \frac{1}{4}dx \end{pmatrix}$

$$= 16\int \cos^2(u)\,du = 16\cdot\frac{1}{2}\left(u+\sin(u)\cos(u)\right) + c = 8\left(\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{4}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}\right)$$

$$= 8\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + 2x\frac{1}{4}\sqrt{16-x^2} + c = \frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2} + 8\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

il faut rétablir la variable $x$ à la fin puisqu'il n'y pas de bornes à changer et

si $\sin(u) = x/4$, alors $\cos(u) = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{1-(x/4)^2}$